

## ÁLGEBRA LINEAR

DATA: 6 / Fevereiro / 2020

Duração: 2 horas

---

**Apresente todos os cálculos e justifique detalhadamente todas as respostas**

1. Considere as seguintes afirmações:

$$(25) \text{ (a)} \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} \quad \forall a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}.$$

(25) (b) Se  $P$  é uma matriz que diagonaliza a matriz  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}$ , então  $P$  também diagonaliza  $M^k, \forall k \in \mathbb{N}$ .

Para cada uma, investigue se é verdadeira ou falsa. Faça uma prova sucinta ou apresente um contra-exemplo para justificar cada resposta.

2. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 0 & 7 \\ 7 & 21 & 7 \end{bmatrix}$ .

(25) (a) Calcule os valores próprios de  $A$ .

(25) (b) Apresente a expressão da forma quadrática  $\Phi(x) = x^T A x$  e classifique a forma.

3. Considere o conjunto de matrizes  $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ 0 & c \\ b & a+c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ .

(25) (a) Mostre que  $F$  é um subespaço de  $\mathcal{M}_{3 \times 2}$  e calcule a dimensão de  $F$ .

(20) (b) Averigue se a aplicação linear  $f: F \rightarrow \mathcal{M}_{1 \times 3}$  definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} a & a+b \\ 0 & c \\ b & a+c \end{bmatrix}\right) = [b \quad c \quad 3a], \quad \forall \begin{bmatrix} a & a+b \\ 0 & c \\ b & a+c \end{bmatrix} \in F$$

é um isomorfismo.

(25) 4. Considere o espaço vectorial  $\mathcal{M}_{m \times n}$  (com  $m \geq 2$  e  $n \geq 2$ ). Construa um subespaço de  $\mathcal{M}_{m \times n}$  com dimensão 2. Justifique a sua opção.

(30) 5. Seja  $B$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  que verifica a igualdade  $B^2 = B$ . Prove que se  $u$  é um vector do espaço coluna de  $(I_n - B)$  então  $u$  é um vector do espaço nulo de  $B$ .